Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

OBS: Maxpoäng per uppgift har ändrats från 3p till 6p. Alla ev tidigare resultat (inkl bonus) med den gamla maxpoängen multipliceras därför med en faktor 2 vid uträkning av betyg på kursen.

Tid och plats: Onsdagen den 4 april 2018 klockan 08.30-11.30 i Maskin-salar.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, ..., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

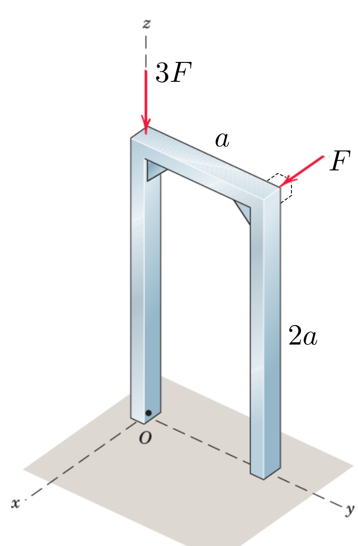
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Torsdagen 3 maj, kl 12.30-13.00 i FL61.

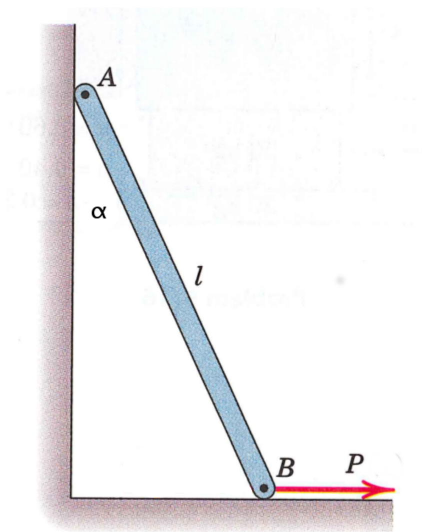
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren, samt tyngdaccelerationen g.

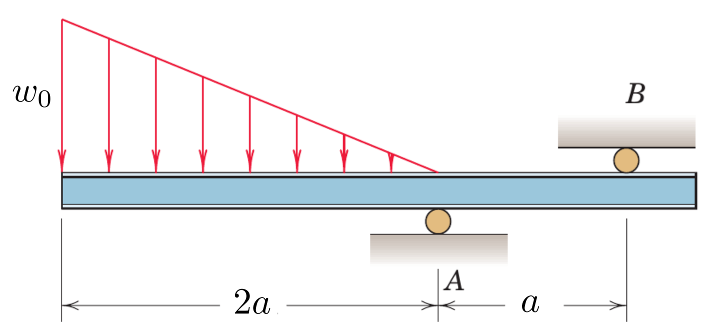
1. De två markerade krafterna kan ersättas med en kraftskruv, d v s en resulterande kraft $\mathbf{R}$ med en viss verkningslinje och ett parallellt kraftparsvridmoment $\mathbf{M}$. Bestäm dessa, samt koordinaterna för den punkt P där verkningslinjen skär yz-planet.



2. Den homogena staven AB med massa m och längd l lutar mot en vertikal vägg enligt figuren. Den statiska friktionskoefficienten mellan staven och alla stödytor är μ_s. Bestäm kraften P, riktad enligt figuren (dvs man drar i staven från höger i punkten B), vilken precis gör att staven börjar glida.

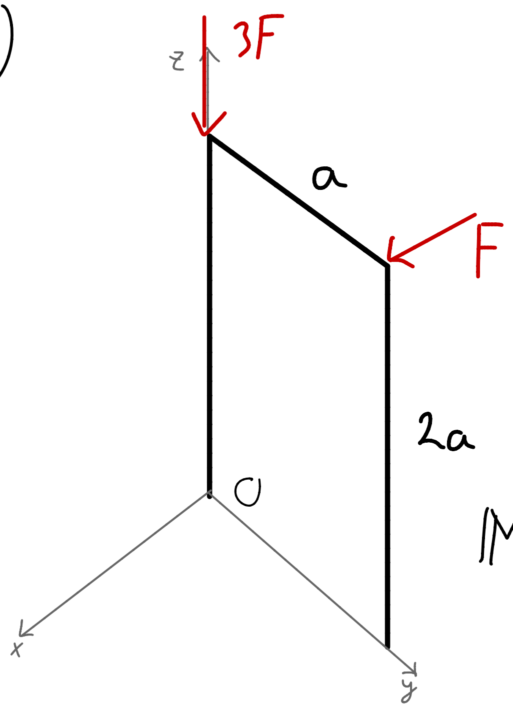


3. Rita skjuv- och momentdiagram för balken nedan och specificera skjuvkraften V och momentet M vid en punkt sträckan a till vänster om punkten A (dvs i mitten av kraftfördelningen). Balkens massa kan försummas.



Lycka till!

1)



Resultanten för krafterna ges av

$$\mathbb{R} = F\hat{x} - 3F\hat{z}$$

Det resulterande vridmomentet ges av

$$\mathbb{M}_O = (a\hat{y} + 2a\hat{z}) \times (F\hat{x}) = -aF\hat{z} + 2aF\hat{y}$$

(Kraften i $\hat{z}$-led ger inget bidrag)

Ansätt $\mathbb{P} = y\hat{y} + z\hat{z}$ som angreppspunkt för kraftskruven.

Vi har då villkoret $\mathbb{P} \times \mathbb{R} + M\frac{1}{\sqrt{10}}(\hat{x} - 3\hat{z}) = \mathbb{M}_O$ (1)

där M är storleken på det parallella vridmomentet.

$$\mathbb{P} \times \mathbb{R} = (y\hat{y} + z\hat{z}) \times (F\hat{x} - 3F\hat{z}) = -yF\hat{z} - 3yF\hat{x} + zF\hat{y}$$

(1) innehåller 3 ekvationer vilka alltså lyder

$$\begin{array}{l} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{array} \begin{cases} -3yF + \frac{M}{\sqrt{10}} = 0 \\ zF = 2aF \\ -yF - \frac{3M}{\sqrt{10}} = -aF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{10} \\ z = 2a \\ M = \frac{3aF}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

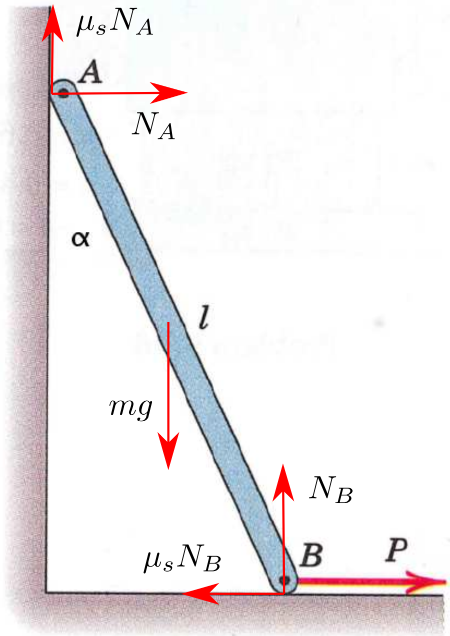
Den ekvivalenta kraftskruven ges av

$\boxed{\mathbb{R} = F\hat{x} - 3F\hat{z}}$ där verkningslinjen skär y-z planet i punkten $\boxed{y = \frac{a}{10}, z = 2a}$

tillsammans med det parallella vridmomentet

$\boxed{\mathbb{M} = \frac{3}{10}aF(\hat{x} - 3\hat{y})}$ $[\mathbb{M}] = m \cdot [\text{kraft}]$ dy!

2)



Figuren visar krafterna från friläggning av stången. Eftersom stången precis börjar glida vid både A och B så är friktionskraften maximal vid båda dessa punkter.

Kraftjämvikt vertikal led

$$\mu_s N_A + N_B - mg = 0$$

Momentjämvikt runt B

$$\begin{aligned} \frac{l}{2}\sin(\theta)mg - l\cos(\theta)N_A - l\sin(\theta)\mu_s N_A &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ N_A &= \frac{\frac{1}{2}\sin(\theta)mg}{\cos(\theta)+\mu_s\sin(\theta)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{mg\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)} \end{aligned}$$

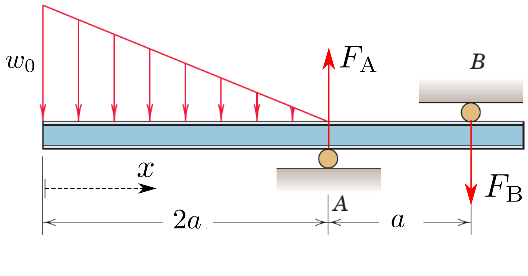
Insatt i kraftjämvikt vertikal led ger detta

$$\begin{aligned} N_B &= mg - \mu_s N_A \\ &= mg\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mu_s\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)}\right) \end{aligned}$$

Kraftjämvikt i horizontell led ger nu

$$\begin{aligned} N_A - \mu_s N_B + P &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ P &= \mu_s N_B - N_A \\ &= \mu_s mg\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mu_s\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)}\right) - \frac{1}{2}\frac{mg\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)} \\ &= mg\left(\frac{1}{2}\frac{\mu_s(2+2\mu_s\tan(\theta)-\mu_s\tan(\theta))-\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)}\right) \\ &= mg\left(\frac{1}{2}\frac{2\mu_s+\mu_s^2\tan(\theta)-\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)}\right) \\ &= \frac{mg}{2}\left(\frac{2\mu_s+(\mu_s^2-1)\tan(\theta)}{1+\mu_s\tan(\theta)}\right) \end{aligned}$$

Uppgift 3



Figur 3.

Den distribuerade kraften kan i friläggningsdiagrammet för hela balken ersättas av den ekvivalenta kraften $F = \frac{1}{2} w_0 \cdot 2a = w_0 a$ verkandes vid $x = \frac{2}{3} a$.

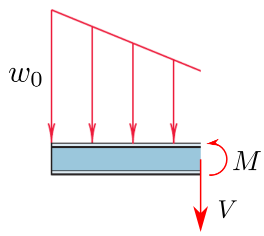
Momentjämvikt kring B ger

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{4}{3}a\right)w_0 a - aF_A &= 0\\ &\Leftrightarrow\\ F_A &= \frac{7}{3}aw_0\end{aligned}$$

Momentjämvikt kring A ger

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}aw_0 a - aF_B &= 0\\ &\Leftrightarrow\\ F_B &= \frac{4}{3}aw_0\end{aligned}$$

Friläggning av en bit till vänster om A ger för kraftjämvikt

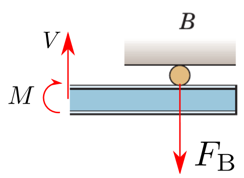


$$\begin{aligned}\int_0^x -\left(1-\frac{s}{2a}\right)w_0 \mathrm{d}s - V(x) &= 0\\ &\Leftrightarrow\\ V(x) &= \left(-x+\frac{x^2}{4a}\right)w_0\end{aligned}$$

Från $M'(x) = V(x)$ får vi

$$\begin{aligned}M(x) &= \int_0^x V(s)\mathrm{d}s\\ &= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12a}\right)w_0\end{aligned}$$

Friläggning av en bit till höger om A ger direkt att



$$\begin{aligned}V(x) &= F_B = \frac{4}{3}aw_0\\ &\Rightarrow\\ M(x) &= M(2a) + \int_{2a}^x F_B \mathrm{d}s\\ &= \left(-2a^2+\frac{2}{3}a^2\right)w_0 + F_B(x-2a)\\ &= -\frac{4}{3}a^2w_0 + \frac{4}{3}aw_0(x-2a)\\ &= -\frac{12}{3}a^2w_0 + \frac{4}{3}aw_0x\end{aligned}$$

Sammanfattningvis har vi

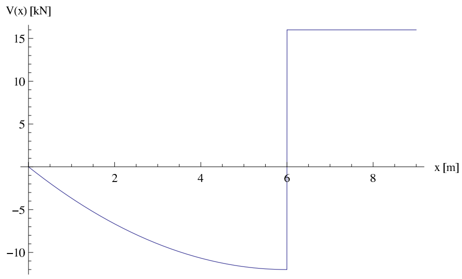
$$V(x) = \begin{cases} \left(-x + \frac{x^2}{4a}\right)w_0 & x < 2a \\ \frac{4}{3}aw_0 & x > 2a \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12a}\right)w_0 & x < 2a \\ \left(-\frac{12}{3}a^2 + \frac{4}{3}ax\right)w_0 & x \geqslant 2a \end{cases}$$

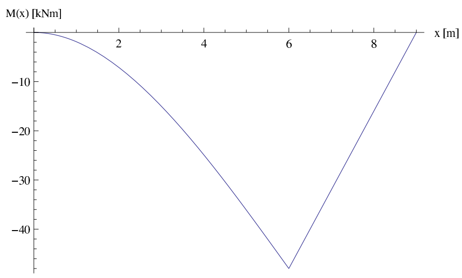
Eftersom $[w_0] = \frac{\text{kraft}}{m}$ ser man att $[V(x)] = \frac{kgm}{s^2}$ och $[M(x)] = \frac{kgm^2}{s^2}$.

Vid punkten $x = a$ ges de av

$$V(a) = -\frac{3}{4}aw_0$$
$$M(a) = -\frac{5}{12}a^2w_0$$



Figur 4. $V(x)$ $\left\{a = 3\text{m}, w_0 = 4\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right\}$



Figur 5. $M(x)$ $\left\{a = 3\text{m}, w_0 = 4\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right\}$